www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ECOLE SUPERIEURE DE GESTION

CONCOURS D'ENTREE 1990

CONCOURS FORMULE GENERALE

EPREUVE DE MATHEMATIQUES I

DUREE : 4 HEURES COEFFICIENT : 3

MARDI 17 AVRIL DE 14H30 A 18H30

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage d'instruments de calcul est autorisé.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage d'instruments de calcul est autorisé.

I - Exercice d'algèbre (5 points)

On désigne par E l'ensemble des matrice de la forme

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1+\frac{\lambda^2}{2} & -\frac{\lambda^2}{2} & \lambda \\ \frac{\lambda^2}{2} & 1-\frac{\lambda^2}{2} & \lambda \\ \lambda & -\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

où λ est un nombre réel.

1) Démontrer que toute matrice de E s'écrit de manière unique sous la forme $I + \lambda B + \frac{\lambda^2}{2} C$ où I désigne la matrice unité de $M_3(\mathbb{R})$ et B, C deux matrices de $M_3(\mathbb{R})$ indépendantes de λ.

2) Calculer BC, CB, B^2, C^2, B^3, C^3

3) Soit $f : (\mathbb{R},+) \longrightarrow (E,.)$

$$\lambda \longmapsto A_\lambda$$

Montrer que f est un homomorphisme.

4) En déduire que (E,.) est un groupe abélien.

5) Calculer A_λ^n en fonction de $(A_\lambda)^2$, A_λ, n et I

II - Exercice de probabilités (5 points)

La durée du processus d'atterrissage d'un avion est le temps T, mesuré en minutes, qui s'écoule depuis la prise en charge par la tour de contrôle jusqu'à l'immobilisation de l'avion sur la piste. Dans un certain aéroport, on estime que T est une variable aléatoire réelle continue dont la densité de probabilité est la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(t) = t\, e^{-t} \text{ si } t > 0 \\ f(t) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

.../...

1) Calculer l'espérance et l'écart type de T

2) Déterminer la fonction de répartition F de T

3) Quelle est la probabilité que :

a) T dépasse 3 minutes

b) T soit compris entre 1 minute et 3 minutes 30 secondes

c) T soit inférieur à 4 minutes 30 secondes sachant qu'il dépasse 3 minutes

4) On suppose que n avions atterrissent successivement dans cet aéroport et que les durées d'atterrissage de chacun d'entre eux suivent la loi T et soient deux à deux indépendantes.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'avions dont le temps d'atterrissage est supérieur à 3 minutes.

a) Quelle est la loi de la probabilité de X ?
b) Calculer l'espérance et la variance de X.

III - Problème d'analyse (10 points)

Dans ce problème, x désigne un réel strictement positif.

1) a) Prouver la convergence des intégrales

$$\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t)^2} \qquad \text{et} \qquad \int_x^{+\infty} \frac{-dt}{t^2(1+t)}$$

b) Trouver 6 constantes réelles a, b, c, d, e, f telles que

$$\frac{1}{t(1+t)^2} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t+1} + \frac{c}{(1+t)^2}$$

$$\frac{1}{t^2(t+1)} = \frac{d}{t} + \frac{e}{t^2} + \frac{f}{t+1}$$

pour tout t élément de $\mathbb{R}^* - \{-1\}$

c) On pose $F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t)^2}$ $\qquad$ $G(x) = \int_x^{+\infty} \frac{-dt}{t^2(1+t)}$

Calculer F(x) et G(x).

2) a) Donner un équivalent des fonctions F et G en $+\infty$.

On pourra poser $u = \frac{1}{x}$ et faire un développement limité en 0 de

$f(x) = F\left(\frac{1}{u}\right)$ et $g(x) = G\left(\frac{1}{u}\right)$

b) En déduire la convergence des intégrales

$$\int_1^{+\infty} F(x)\,dx \qquad \text{et} \qquad \int_1^{+\infty} G(x)\,dx$$

et donner leurs valeurs éventuelles.

3) Démontrer que pour $x > 0$: $\left(\frac{1+x}{x}\right)^x < e < \left(\frac{1+x}{x}\right)^{1+x}$

4) En raisonnant par récurrence sur n, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{(n+1)^n}{n!} < e^n < \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$$

En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$

$$1 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{n!}{n^n}\, e^n < (n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < (n+1)\,e$$

5) On considère les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad S_n = \frac{e^n \cdot n!}{n^n\sqrt{n}}$$

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$$

a) Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge (on pourra être amené à étudier la fonction h définie par $h(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^{x+\frac{1}{2}}$ pour $x \geqslant 1$)

b) Pour $n \geqslant 1$ trouver une relation entre I_{n+1} et I_{n-1}, en déduire la valeur de I_n pour n pair puis n impair

c) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n}$

d) Calculer $\frac{(S_n)^2}{S_{2n}}$

e) Déduire des calculs précédents la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et un équivalent de n ! pour les grandes valeurs de n.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail